

Sesión preparatoria Olimpiada Local 2017-18

(Grupo 1. ENUNCIADOS)

Sevilla, 1 de diciembre de 2016

1.- Probar que para todo entero positivo n ,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2.- Probar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3.- Probar que para todo n , $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ es divisible por 8

4.- Probar que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 para todo entero positivo.

5.- Todo número natural $n > 1$ es primo o se expresa como un producto de números primos.

6.- Sea $\{a_k\}$ una sucesión de números enteros tales que $a_1=1$; $a_{m+n} = a_m + a_n + m \cdot n$ para cualesquiera enteros positivos m, n . Probar que la sucesión está bien definida, es decir, que a_k toma siempre el mismo valor, independientemente de los m, n tales $m+n = k$

7.- Probar que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$

8.- Si $a \leq b$ son dos enteros positivos primos entre sí, probar que $2^a - 1$ y $2^b - 1$ son también primos entre sí.

9.- Sean x_1, x_2, \dots, x_n números enteros tales que se pueden expresar como suma de dos cuadrados perfectos. Probar que su producto, $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ puede expresarse igualmente como suma de dos cuadrados perfectos. --- (*Olimpiada matemática alemana, 2013*)

10.- Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in (-1, 0]$. Probar que para todo n ,

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

11.- (NO) Demuéstrese que, siendo $a > 0$, para cualquier número natural n se verifica que $(1 + a)^n \geq 1 + an$

12.- (NO) Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es verdadera la desigualdad $2^n > n^2 + 4n + 5$

13.- En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay un ganador y un perdedor.

Decimos que los jugadores p_1, p_2, \dots, p_m forman un ciclo de longitud m si p_1 le gana a p_2 , p_2 le gana a p_3, \dots, p_{m-1} le gana a p_m , y p_m le gana a p_1 .

Demostrar que si hay un ciclo p_1, p_2, \dots, p_m ($m \geq 3$), entonces hay un ciclo de longitud 3.

14.- Encontrar, si existen, todas las cuaternas de números enteros positivos (x, y, z, t) , que verifiquen $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$.

NO: no hechos en esta sesión